مبرهنة:

ليكن f تطبيقاً $f: X \to Y$ و A مجموعة جزئية
من X ؛ $A \subseteq X$ ، $x_0 \in X$
إذا كانت النقطة x_0 لاصقة المجموعة A، f مستمراً في x_0 فإن النقطة $f(x_0) = \overline{f(A)}$

البرهان:

ليكن V جواراً كيفياً لـ $f(x_0)$ في Y بما أن f مستمراً في النقطة x_0 وبالتالي حسب المبرهنة السابقة $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0

بما أن x_0 لاصقة بـ A ⟸ أي جوار لها يتقاطع مع A وبالتالي

$$f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$$

وبما أن هذا التقاطع غير خالي فإن x ينتمي إليه ومنه

$$x \in f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$$

$$f(x) \in f(f^{-1}(V) \cap A) \subseteq f f^{-1}(V) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$$

تعريف:

نقول عن التطبيق f أنه مستمراً على X إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط X

مبرهنة:

ليكن f تطبيقاً $f: X \to Y$ إن القضايا التالية متكافئة
1) f مستمرة على X
2) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ من أجل أي مجموعة A من X
3) الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مغلقة في Y هي المجموعة المغلقة في X
4) الصورة العكسية لـ f لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X

البرهان:

1 ⟸ 2 ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة

2 ⟸ 3 لتكن V مجموعة مغلقة من Y ، $u = f^{-1}(V)$ وهي ~~صورة~~ صورتها العكسية

$$f(\bar{u}) \subseteq \overline{f(u)} = \overline{f f^{-1}(V)} \subseteq \bar{V} = V$$

كونها مغلقة وبالتالي لصاقتها تساويها

$$f(\bar{u}) \subseteq V$$

$$\bar{u} \subseteq f^{-1} f(\bar{u}) \subseteq f^{-1}(V) = u$$

3 ⟸ 4 لنأخذ مجموعة مفتوحة كيفية في Y ولتكن G عندها $Y \setminus G$ مغلقة في Y

وحسب ب : $f^{-1}(Y\setminus G)$ مغلقة في Y

مفتوحة في X $f^{-1}(G) \Leftarrow X\setminus f^{-1}(G) = f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(G) =$

وبالتالي فإن متممتها مغلقة فهي مفتوحة

ب ← ١ : لتكن x نقطة كيفية من X $x\in X$ ولتكن V جواراً كيفياً

للنقطة $f(x)$ في Y $f(x)\in G\subseteq V$

$x\in f^{-1}(G)\subseteq f^{-1}(V)$

حسب $f^{-1}(G)$ مفتوحة وبالتالي $f^{-1}(V)$ جوار لـ x وبالتالي حسب المبرهنة الأولى فإن الصورة العكسية لأي جوار لـ $f(x)$ هو جوار لـ x وبما أن x كيفية فإن f مستمر في جميع النقاط.

ملاحظة :

إذا كان f تطبيقاً $f: X\to Y$ و B قاعدة لـ Y فإن f يكون مستمراً على X إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي عنصر في B هي مجموعة مفتوحة في X **البرهان :** يبرهن بسهولة لأن تركيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر

مبرهنة :

ليكن f تطبيقاً $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$

إذا كان تطبيقان f, g مستمرين فإن تركيبهما $g\circ f: X\to Z$

البرهان :

لتكن W مجموعة مفتوحة في Z وبما أن g مستمرة فالمجموعة $f^{-1}(W)$ مفتوحة في Y وبما أن f مستمرة فإن: $f^{-1}(g^{-1}(W))$ مفتوحة في X ولكن

$= (g\circ f)^{-1}(W)$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Z هي مجموعة مفتوحة

أي تطبيق المركب مستمر.

* **عودة إلى مقارنة الطبولوجيات :** مفهوم أقوى وأضعف

لنفرض أنه لدينا τ_1 و τ_2 طبولوجيتين على X قلنا سابقاً أن τ_1 أقوى من τ_2 إذا كان $\tau_2\subseteq\tau_1$

سنعطي تعريفاً مكافئاً بواسطة استمرار التطبيق

نقول عن الطبولوجيا τ_1 أنها أقوى من τ_2 إذا كان التطبيق المطابق مستمر

$I: (X,\tau_1)\longrightarrow(X,\tau_2)$

- ليكن $u \in \tau_2$ وبما أن I مستمر $u = I^{-1}(u) \in \tau_1$

بما أن تطبيق مطابق فإن الصورة العكسية لـ u هي u ويبرهن بسهولة تكافؤ القضايا التالية:

1. τ_1 أقوى من τ_2
2. أي مجموعة مفتوحة في τ_2 هي مجموعة مفتوحة في τ_1
3. أي مجموعة مغلقة في τ_2 هي مجموعة مغلقة في τ_1
4. أي جوار لأي نقطة في τ_2 هو جوار في τ_1 لهذه النقطة
5. لصاقة أي مجموعة في τ_1 تحوي لصاقة هذه المجموعة في τ_2

سنوضح البند الخامس في مثال:

$X = \{a, b\}$ ، $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ ، $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$

ولتكن $A = \{a\}$

- ما هي لصاقة A في τ_1:

$\bar{A}_{\tau_1} = \{a\} = A$

- ما هي لصاقة A في τ_2:

$\bar{A}_{\tau_2} = X$

ملاحظة

1. كلما كانت الطبولوجيا أقوى ازدادت كل المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة والجوارات.
2. كلما كانت الطبولوجيا أقوى صغرت اللاصقات وكبرت الداخليات.
3. كلما كانت الطبولوجيا أقوى قلت المجموعات الكثيفة

* ملاحظة:

لتكن f تطبيقاً مستمراً $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$

إذا استبدلنا الطبولوجيا τ بأخرى أقوى منها τ_1

يبقى التطبيق مستمراً وكذلك الأمر إذا استبدلنا τ' بأخرى أضعف منها يبقى مستمر

• إذا كانت τ الطبولوجيا القوية (المتقطعة)

τ' الطبولوجيا الضعيفة (غير المتقطعة)

في هذه الحالة أي تطبيق بالدنيا يكون مستمر

تعريف:

التماثل المستمر

نطلق على التطبيق $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ أنه تقابل طبولوجي مستمر إذا كان تقابلاً مستمراً هو ومعكوسه

f : تقابل (غامر ومتباين)

f : مستمر

f^{-1} : مستمر

* نقول عن فضائين طبولوجيين أنهما متكافئين إذا وجد بينهما هوموموفيزم (واحد على الأقل)

٨٣